تبدیل لاپلاس

تابع $f(t)$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $Re(s) > 0$ (s عدد مختلط با قسمت حقیقی مثبت) در این صورت $\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ را در صورت وجود، لاپلاس $f(t)$ نامند و با $L(f(t)) = F(s)$ نمایش می‌دهند و به آن تبدیل لاپلاس یک طرفه هم می‌گویند.

قضایا

۱) ضرب در e^{at} (انتقال درحوزه S)

$$e^{at}f(t) \to \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

۲) ضرب در t

$$L(tf(t)) \to -F'(s)$$

تعمیم

$$L(t^n f(t)) \to (-1)^n F^{(n)}(s)$$

۳) انتقال در حوزه t $(t_0 > 0)$

$$L\big(f(t-t_0)u(t-t_0)\big) \to e^{-t_0 s}F(s)$$

٤) مشتق

$$L(f'(t)) \to sF(s) - f(0^-)$$

تعمیم

$$L(f^n(t)) \to s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

۵) انتگرال

$$L\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) \to \frac{f(s)}{s}$$

٦) تقسیم بر t

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) \to \int_s^{+\infty} F(s)ds$$

۷) کانولوشن

$$L\big(f(t) * g(t)\big) \to F(s).G(s)$$

۸) قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

۹) قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s)$$

محاسبه تبدیل لاپلاس برخی توابع

۱) $\delta(t)$ (ضربه)

$$L(\delta(t)) = 1$$

۲) $u(t)$ (پله)

$$L(1) = L\big(u(t)\big) = \int_0^{\infty} 1 \times e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

۳) t^n $(n \in \mathbb{Z})$

$$L(t^n) = (-1)^n \times \left(\frac{1}{s}\right)^{(n)} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

۴) t^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$ $L(t^{\alpha}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

۵) $L(e^{ait}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$

۶ و ۷) $L(\cos at + i\sin at) = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$, $L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$

۸) $L\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right) = L(ch(at)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}$

۹) $L(sh(at)) = L\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$

مثال- کدام گزینه صحیح است؟ $L(f(t)) = \ln\frac{s+1}{s}$

۱) $f(t)$ در صفر جهشی برابر ۱ دارد
۲) $f(t)$ در صفر ضربه دارد
۳) $f(t)$ در صفر پیوسته است
۴) $f(t)$ مجانبی به معادله $f(t)=1$ دارد.

از قضیه مقدار اولیه بهره می‌بریم:

$$\lim_{s\to\infty} s\ln\frac{s+1}{s} = \lim_{s\to\infty}\frac{\ln\frac{s+1}{s}}{\frac{1}{s}} = \lim_{s\to\infty}\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}}{\frac{-1}{s^2}} = 1 = f(0^+)$$

چون در مورد $f(0^-)$ چیزی گفته نشده، آن را صفر می‌گیریم. بنابراین $f(t)$ در $t=0$ جهشی برابر یک دارد، برای مجانب از قضیه مقدار نهایی بهره خواهیم برد.

$$\lim_{s\to 0} s\ln\frac{s+1}{s} = 0 \to \underset{t\to\infty}{f(t)} = 0 \text{ مجانب}$$

اگر $\lim_{s\to\infty} sf(s) = \infty$ می‌شد آنگاه تابع $f(t)$ در $x=0$ دارای ضربه می‌شد. در اینجا $f'(t)$ در صفر، ضربه‌ای با قدرت واحد دارد.

مثال- تبدیل لاپلاس جواب معادله $y'(0)=0$ و $y(0)=2$ و $xy''+y'+xy=0$ چیست؟

معادله داده شده معادله بسل مرتبه ۲ با شرایط اولیه ۲ است لذا $Y(s)$ تبدیل لاپلاس $2J_0(x)$ است. از معادله با توجه به قضایای یاد شده لاپلاس می‌گیریم:

$$-(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))' + sY(s) - y(0) - Y'(s) = 0$$

$$\Rightarrow -2sY - s^2Y'(s) + 2 + sY - 2 - Y' = 0 \to -(s^2+1)Y'(s) - sY(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Y'}{Y} = \frac{-s}{s^2+1} \Rightarrow \ln Y = \frac{-1}{2}\ln(s^2+1) + c$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}} \Rightarrow \lim_{s\to\infty} sY(s) = 2 = c \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{\sqrt{s^2+1}}$$

مثال- اگر $f(t) = e^{-2t}\sin t\, u(t-\pi)$، $F(s)$ را حساب کنید.

$$f(t) = -e^{-2\pi}\left(e^{-2(t-\pi)}\sin(t-\pi)u(t-\pi)\right) \to L\left(e^{-2t}\sin t\right) = \frac{1}{(s+2)^2+1} \Rightarrow L(f(t)) = F(s) = -e^{-2\pi}\frac{1}{(s+2)^2+1}e^{-\pi s}$$

مثال- اگر تبدیل فوریه $f(t)$، $f(s)$ باشد، $F(1)$ چیست؟ $f(t) = e^{1-e^{-t}}$

$$F(1) = \int_0^{\infty} e^{1-e^{-t}}\, e^{-1\times t}dt = e^{1-e^{-t}}\Big]_0^{\infty} = e-1$$

معادله اشتورم لیوویل

این معادله فرم کلی چند معادله اخیر است که به صورت روبرو است:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}y\right)+(q+\lambda\rho)y=0$$

$$\Rightarrow p\frac{d^2y}{dx^2}+p'\frac{dy}{dx}+(q+\lambda\rho)y=0\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p'}{p}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{q}{p}+\frac{\lambda\rho}{p}\right)y=0$$

این معادله با شرایط مرزی همگن، در $x=a$ و $x=b$ دارای یک سری توابع ویژه و مقادیر ویژه نظیر آنها می‌باشد. می‌توان نشان داد که اگر $\varphi_n(x)$ و $\varphi_m(x)$ دو تابع ویژه نظیر دو مقدار ویژه λ_n و λ_m باشند، همواره بر هم عمودند؛ البته با وزن تابع ρ یعنی:

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0$$

مثال- در معادله روبرو مقادیر ویژه (λ) و توابع ویژه نظیر آنها را بیابید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+\lambda y=0\quad y(0)=0\quad y'(1)=0 \qquad D^2+2D+\lambda=0\rightarrow(D+1)^2+\lambda-1=0$$

باید روی مقادیر ویژه λ بحث کنیم:

الف) $\lambda-1=0\quad\left\{e^{-x}\ ,\ xe^{-x}\right\}$

ب) $\lambda-1=-\omega^2\quad\left\{e^{(-1+\omega)x},e^{-(1+\omega)x}\right\}$

ج) $\lambda-1=\omega^2\quad\left\{e^{-x}\cos\omega x\ ,\ e^{-x}\sin\omega x\right\}$

حالت الف) cxe^{-x} قابل قبول است، لذا $\lambda=1$ مقدار ویژه و cxe^{-x} تابع ویژه است.

اگر $y'(2)=0$ جزء شرایط اولیه بود آنگاه حالت الف غیر قابل قبول می‌شد:

$$cxe^{-x}\xrightarrow{\text{مشتق}}ce^{-x}(1-x)|_{x=2}=0\rightarrow c=0\rightarrow \text{غ ق ق}$$

* چون تابع ویژه غیر صفر است.*

حالت ب)

$$\text{تابع}=C(e^{(-1+\omega)x}-e^{(-1-\omega)x})\rightarrow y(0)=0$$

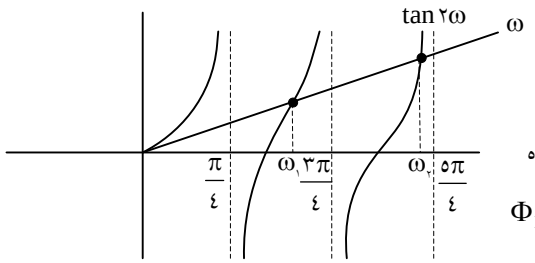
$$x=2\ \text{مشتق در}\rightarrow c\left[(-1+\omega)e^{(-1+\omega)\times2}+(1+\omega)e^{(-1-\omega)\times2}\right]=0$$

که جواب‌های این معادله $\omega=0$ یا $C=0$ است که هر دو غیر قابل قبولند.

حالت ج)

$$y=e^{-x}\sin\omega x\rightarrow y'=-e^{-x}\sin\omega x+\omega e^{-x}\cos\omega x|_{x=2}=0$$

$$\rightarrow-\sin2\omega+\omega\cos2\omega=0\rightarrow\tan2\omega=\omega\Rightarrow\omega=\omega_n>0$$



مقادیر ویژه $=1+\omega_n^2$

$$\Phi_n(x)=e^{-x}\sin\omega_n x$$

و یک نتیجه این است که:

$$\int_0^2\rho\left(e^{-x}\sin\omega_n x.e^{-x}\sin\omega_m x\right)dx=0\Rightarrow\rho=e^{2x}\quad;\ n\neq m$$

برای nهای به قدر کافی بزرگ $\omega_n\simeq\frac{(2n+1)\pi}{4}$ است و می‌توان توابع ویژه را به صورت زیر تقریب زد:

$$\varphi_n(x) \underset{n>>1}{=} e^{-x}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}$$

مثال- توابع ویژه و مقادیر ویژه $\frac{d^2y}{dx^2}+x^{-1}\frac{dy}{dx}+\lambda x^{-2}y=0$ را با فرض $y(1)=0$ و $y'(e)=0$ بیابید.

$$D(D-1)+D+\lambda=0\to D^2+\lambda=0\to D^2=-\lambda\to\begin{cases}\lambda=0 & \{\ln x,1\}\ \text{غ‌ق‌ق}\\ \lambda=\omega^2 & \{\cos\omega\ln x,\sin\omega\ln x\}\ \text{ق‌ق}\\ \lambda=-\omega^2 & \{x^{\omega},x^{-\omega}\}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

شرط مرزی $y'(e)=0$ باعث غیر قابل قبول شدن دو جواب اول و سوم شده است.

$$\text{حالت دوم}\to y=c\sin\omega\ln x\to y'(e)=\omega\frac{1}{x}c\cos\omega\ln x\,|_{x=e}=\frac{c\omega}{e}\cos\omega=0\to\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

مقدار ویژه: $\lambda=\omega_n^2=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$ و تابع ویژه: $\to\varphi_n(x)=\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\ln x$

مثال- در معادله لژاندر، مقادیر p، q و ρ و λ را تعیین کنید: $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$: معادله لژندار

$$P=1-x^2\quad,\quad q+\rho\lambda=\alpha^2+\alpha\to q=0\,,\ \rho=1\,,\ \lambda=\alpha(\alpha+1)$$

ρ و q توابعی از x هستند و λ عدد ثابتی است. بنابراین مقدار ویژه تابع لژاندر، $\alpha(\alpha+1)$ می‌باشد.

مثال- در مورد تابع بسل مثال قبل را تکرار کنید.

تابع بسل : $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

$$\to y''+\frac{1}{x}y'+\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0\to p=x\ ,q=x\ ,\ \rho=+\frac{1}{x}\ ,\ \lambda=-\nu^2$$

توجه کنید که معمولاً $\rho>0$ گرفته می‌شود.

در ضمن شرایط مرزی همگن در $x=0$ و $x=+\infty$ است لذا $m\neq n$ $\int_0^\infty\frac{1}{x}J_n(x)J_m(x)dx=0$.

مثال- آیا معادله $y''+2y'+\lambda y=0$ اشتورم لیوویل است؟

اشتورم لیوویل است $\to\lambda=\lambda$ و $q=0$,$\rho=e^{2x}$, $p=e^{2x}\to e^{2x}y''+2e^{2x}y''+\lambda e^{2x}y=0$

مثال- جواب معادله داده شده چیست؟

$$4x^2y''+4xy'+(16x^2-1)y=0$$

$$\to x^2y''+xy'+(4x^2-\frac{1}{4})y=0\xrightarrow{\text{بسل}}\left\{J_{\frac{1}{2}}(2x)\ ,\ J_{\frac{-1}{2}}(2x)\right\}=\left\{\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\ ,\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}\right\}$$

مثال- معادله روبرو را حل کنید: $xy''+y'+\frac{1}{4}y=0\qquad y(0)=1$

یک روش حل این معادلات ایده تبدیل به معادله بسل است که این کار به دو روش انجام می‌شود. یکی «تعویض تابع» که به صورت زیر است:

$$u''+\left(\frac{2v'}{v}+a\right)u'+\left(\frac{v''+av'+bv}{v}\right)u=0$$

برای بسل شدن باید $\frac{2v'}{v}+a=\frac{1}{x}$ لذا: $\frac{2v'}{v}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\to v'=0\to v=c$

که این درست نیست چون v باید متغیر باشد. لذا روش «تعویض تابع» در uv بدرد نمی‌خورد. روش دیگر روش «تعویض متغیر» است که به شرح زیر است:

$$x=g(z)\to\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{g'(z)}\quad,\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}g'(z)-\frac{dy}{dz}g''(z)}{(g'(z))^3}$$

$$\to\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0\to\frac{1}{g'^2}\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{-g''}{g'^3}+\frac{a}{g'}\right)\frac{dy}{dz}+by=0\to\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{-g''}{g'}+ag'\right)\frac{dy}{dz}+bg'^2y\Rightarrow\begin{cases}\frac{-g''}{g'}+ag'=\frac{1}{z}\\ bg'^2=\lambda^2-\frac{v^2}{z^2}\end{cases}$$

در این مثال داریم:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{-g''}{g'}+\frac{1}{g}g'\right)\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4g}g'^2y=0\quad\Rightarrow\quad\frac{-g''}{g'}+\frac{g'}{g}=\frac{1}{z}\to-\ln g'+\ln g=\ln kz\to g=g'zk\to\frac{kg'}{g}=\frac{1}{z}\Rightarrow g=z^k$$

k هر چیزی می‌تواند باشد ولی باید $\frac{1}{4g}g'^2=\lambda^2-\frac{v^2}{z^2}$ باشد. بنابراین:

$$\frac{1}{4z^k}\times k^2z^{2k-2}=\frac{k^2}{4}z^{k-2}\to y''+\frac{1}{z}y'+\frac{k^2}{4}z^{k-2}y=0\xrightarrow{k=2}y''+\frac{1}{z}y'+y=0$$ بسل مرتبه صفر

پس جواب $J_0(z)=J_0\left(\sqrt{x}\right)$ است.

مثال- معادله روبرو را به بسل تبدیل کرده و جواب آن را بیابید. $xy''+(1+2n)y'+xy=0$

تعویض تابع $\frac{2v'}{v}+\frac{1+2n}{x}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2v'}{v'}=\frac{-2n}{x}\to v=x^{-n}$

$$\to u''+\frac{1}{x}u'+\frac{-n(-n-1)x^{-n-2}+\frac{1+2n}{x}\times-nx^{-n-1}+x^{-n}}{x^{-n}}u=0$$

$$\to u''+\frac{1}{x}u'+\frac{(n^2+n-n-2n^2)x^{-n-2}+x^{-n}}{x^{-n}}u=0\to u''+\frac{1}{x}u+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)u=0$$

معادله بسل مرتبه n شد. لذا $u=J_n(x)\to y=x^{-n}J_n(x)$

دستگاه معادلات خطی

فرض کنید $x\in\mathbb{R}^n;x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{n\times1}$. تعریف می‌کنیم $\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}\end{bmatrix}$. همچنین A(t) به صورت $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ را تعریف می‌کنیم. بردار nتایی $u=u(t)$ را نیز به صورت $\begin{bmatrix}u_1(t)\\ \vdots\\ u_n(t)\end{bmatrix}$ عضو $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم.

دستگاه معادلات خطی روبرو را در نظر بگیرید: $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+u(t)$

برای حل ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم: $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$

از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم: $SX(s)-x(0^-)=A(s)*X(s)$

حالت خاص $A(t)=A$ ثابت باشد:

$$SX(s)-x(0^-)=AX(s)$$

$$\Rightarrow (SI-A)X(s)=x(0^-)\rightarrow X(s)=(SI-A)^{-1}x(0^-)$$

تعریف: $(SI-A)^{-1}=L(\varphi(t))$؛ $\varphi(t)$ را ماتریس انتقال حالت A گویند و با e^{At} نمایش می‌دهند. در واقع

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+....$$

$$(SI-A)^{-1}=s^{-1}\left(I-\frac{1}{s}A\right)^{-1}=S^{-1}\left(I+\frac{A}{S}+\frac{A^2}{S^2}+\frac{A^3}{S^3}+...\right)=\frac{I}{S}+\frac{A}{S^2}+\frac{A^2}{S^3}+...$$

$$\rightarrow \text{عکس لاپلاس} \Rightarrow \varphi(t)=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+...=e^{At}$$

$$\Rightarrow X_h(s)=(SI-A)^{-1}x(0^-)\ ,\ x_h(t)=e^{At}x(0^-)$$

تا اینجا جواب همگن را به دست آوردیم. حال سؤال پیدا کردن جواب خصوصی است. اگر از رابطه کلی لاپلاس می‌گرفتیم:

$$SX(s)-x(0^-)=AX(s)+U(s)$$

$$(SI-A)X(s)=x(0^-)+U(s)\rightarrow X(s)=(SI-A)^{-1}\left[x(0^-)\right]+(SI-A)^{-1}U(s)$$

$$\rightarrow x(t)=e^{At}\left(x(0^-)+\int_0^t e^{-A\tau}u(\tau)d\tau\right)$$

مثال-

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1+2x_2\\ \dot{x}_2&=2x_1-x_2+1\end{aligned}\qquad \begin{bmatrix}x_1(0^-)\\ x_2(0^-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-1\end{bmatrix}\rightarrow (SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1&-2\\-2&s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2-4}\begin{bmatrix}s+1&2\\2&s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+1)^2-4}&\frac{2}{(s+1)^2-4}\\ \frac{2}{(s+1)^2-4}&\frac{s+1}{(s+1)^2-4}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(t)=e^{-t}\begin{bmatrix}ch2t&sh2t\\sh2t&ch2t\end{bmatrix}\Rightarrow x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=e^{-t}\begin{bmatrix}ch2t&sh2t\\sh2t&ch2t\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\int_0^t e^{-\tau}\begin{bmatrix}ch2\tau&-sh2\tau\\-sh2\tau&ch2\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau\right\}$$

$$=\cdots+\int_0^t e^{-\tau}\begin{bmatrix}-sh2\tau\\ch2\tau\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\int_0^t\begin{bmatrix}-e^{3\tau}+e^{-\tau}\\e^{3\tau}+e^{-\tau}\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\cdots+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}e^{3\tau}-e^{-\tau}\\ \frac{1}{3}e^{3\tau}-e^{-\tau}\end{bmatrix}_0^t$$

$$\Rightarrow x(t)=e^{-t}\begin{bmatrix}ch2t&sh2t\\sh2t&ch2t\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(1-e^{3t})-(1-e^{-t})\\ \frac{-1}{3}(1-e^{3t})-(1-e^{-t})\end{bmatrix}\right)$$

تبدیل معادله خطی مرتبه n به دستگاه

برداری به شکل روبرو تشکیل می‌دهیم:

$$x=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b$$

با توجه به تعریف فوق و معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n داده شده داریم:

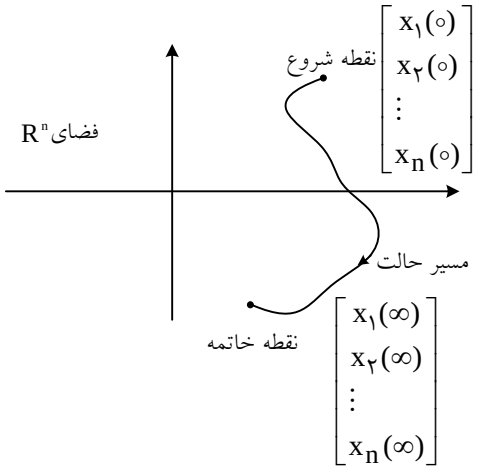
$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2\\
&\dot{x}_2=x_3\\
&\dot{x}_3=x_4\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n-1}=x_n\\
&\dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3-\cdots-a_{n-1}x_n+b
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad u=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$$

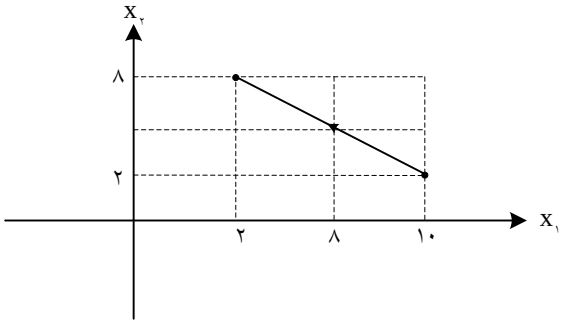
مثال- $\ddot{y}+3t\dot{y}+2y=t$ را به دستگاه تبدیل کنید:

$$x=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-3x_1-3tx_2+t \end{aligned} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3t \end{bmatrix} \quad ; \quad u=\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

x را متغیر حالت می‌نامند. مسیر متغیر حالت در $\mathbb{R}^n$ را مسیر حالت گویند که یک منحنی است در $\mathbb{R}^n$.



مثال- در منحنی حالت داده شده اگر در زمان t_0، $x_1 = 8$ باشد، x_2 در همین زمان چند است؟



با توجه به منحنی $\rightarrow$ $x_1(0) = 10$ $\quad x_1(\infty) = 2$ ، $x_2(0) = 2$ $\quad x_2(\infty) = 8$

در اینجا ∞ منظور انتهای مسر حالت است.

$x_1(t_0) = 8 \rightarrow x_2(t_0) = ?$ $\qquad \frac{x_2 - 2}{6} = \frac{2}{8} \rightarrow x_2(t_0) = 3/5$ ؟

مسیر حالت به شرایط اولیه شدیداً وابسته است.

جایی که حل معادله برایمان مشکل است ولی مسیر حالت را می‌توانیم تشخیص دهیم، این مسیر بدرد می‌خورد.

مثال- مسیر حالت را بیابید.

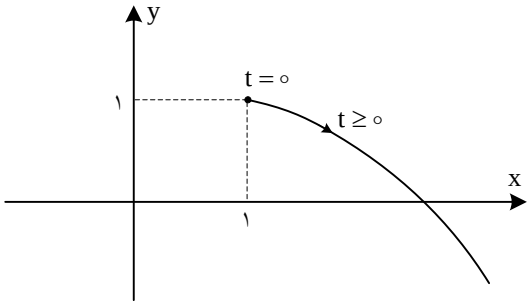
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$SX - 1 = X \Rightarrow X = \frac{1}{s-1} \Rightarrow x(t) = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$SY - 1 = -X + Y = 1 - \frac{1}{s-1} + Y \Rightarrow Y(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^t - te^t \Rightarrow y = x - x\ln x \qquad \text{مسیر حالت: } x > 0$$

برای رسم مسیر، از رابطه به دست آمده مشتق می‌گیریم

$$y' = 1 - \ln x + x\left(\frac{-1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\Rightarrow x = 1 \;;\; y' = 0 \quad , \quad y'' = \frac{-1}{x} < 0 \rightarrow \text{تعقر رو به پایین}$$