معادله مرتبه n خطی با ضرایب ثابت

فرم کلی:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

a_i, $0 \le i \le n-1$ ثابت هستند.

طریقه حل:

الف) ابتدا معادله همگن را حل می‌کنیم:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

معادله مشخصه

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0 = 0$$

اگر α جواب مرتبه P معادله مشخصه باشد $\left((D-\alpha)^P = 0\right)$، آنگاه جواب‌های متناظر معادله دیفرانسیل همگن عبارت است از:

$$A_1 = \{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{p-1}e^{\alpha x}\}$$

و اگر $\left((D-\alpha)^2 + \beta^2\right)$ باشد یعنی $\alpha \pm j\beta$ جواب مرتبه p معادله مشخصه باشد، آنگاه

$A_2 = \begin{Bmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{Bmatrix}$، 2p جواب متناظر معادله دیفرانسیل همگن است، چون مرتبه معادله 2P بوده است.

به مجموعه‌های A_1 و A_2 مجموعه جواب‌های پایه معادله می‌گویند و جواب عمومی معادله همگن ترکیب خطی اعضای این مجموعه‌ها است.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل زیر چیست؟

$$y'' + 2y' + y = 0$$

معادله مشخصه: $D^2 + 2D^1 + 1 = 0 \to (D+1)^2 = 0 \to D = -1, -1 \Rightarrow$ مجموعه جواب‌های پایه $= \{e^{-x}, xe^{-x}\}$

$$\Rightarrow y_h == c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

مثال: جواب پایه معادله زیر کدام است؟

$$\left(D^2 + 2D + 5\right)^2\left(D^2 - 1\right)y = 0 \qquad \left((D+1)^2 + 4\right)^2 (D+1)(D-1)y = 0$$

جواب پایه $y = C_1 e^{-x}\sin 2x + C_2 e^{-x}\cos 2x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{x}$

ب) یافتن جواب خصوصی

معمولاً برای جواب خصوصی حدس می‌زنیم و معمولاً جواب خصوصی از جنس تابع $b(x)$ است.

مثال:

$$y'' + 2y' + y = x^2 - 3x + 1$$

$D^2 + 2D + 1 = 0 \qquad (D+1)^2 = 0 \to y_n = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ جواب همگن:

جواب خصوصی: حدس می‌زنیم: $y_p = x^۲ + bx + c$

حال y_p حدس زده شده را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y_p'' + ۲y_p' + y_p = ۲ + ۲(۲x + b) + x^۲ + bx + c = x^۲ - ۳x + ۱ \;\rightarrow\; x^۲ + (۴ + b)x + \left(۲ + ۲b + c\right) = x^۲ - ۳x + ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴ + b = -۳ \Rightarrow b = -۷ \\ ۲ + ۲b + c = ۱ \Rightarrow c = ۱۳ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = y_h + y_p == (c_۱ + c_۲x)e^{-x} + x^۲ - ۷x + ۱۳$$

معادله خطی با ضرایب متغیر

فرم کلی $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$

حل:

الف) ابتدا معادله همگن را بررسی می‌کنیم:

$$y'' + ay' + by = ۰$$

پاسخ را به صورت y=uv در نظر می‌گیریم که u و v توابعی از x هستند:

$$y' = u'v + uv' \rightarrow y'' = u''v + ۲u'v' + uv''$$

آنگاه طبق معادله اصلی:

$$u''v + ۲u'v' + uv'' + au'v + auv' + buv = ۰$$
$$\rightarrow u''v + (۲v' + av)u' + (v'' + av' + bv)u = ۰$$
$$\Rightarrow u'' + \left(\frac{۲v'}{v} + a\right)u' + \left(\frac{v'' + av' + bv}{v}\right)u = ۰ \qquad (*)$$

کافی است برای حل معادله مرتبه ۲، معادله (*) را به خاطر بسپارید. توجه دارید که صورت ضریب u، همان معادله دیفرانسیل اصلی به ازای y=v است.

مثال: u را چنان بیابید که $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ پاسخ معادله زیر باشد:

$$y'' + \frac{۱}{x}y' + \left(\lambda^۲ - \frac{۱}{۴x^۲}\right)y = ۰$$

$$y = \frac{u}{\sqrt{x}} = uv \Rightarrow v = \frac{۱}{\sqrt{x}} \quad , \quad v' = \frac{-۱}{۲\sqrt{x^۳}} \quad , \quad v'' = \frac{۳}{۴\sqrt{x^۵}}$$

$$\Rightarrow u'' + \left(۲\frac{v'}{v} + \frac{۱}{x}\right)u' + \frac{v'' + \frac{۱}{x}v' + \left(\lambda^۲ - \frac{۱}{۴x^۲}\right)v}{v}u = ۰$$

$$\Rightarrow u'' + \underbrace{\left(۲\frac{-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}}{x^{-\frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{x}\right)}_{=۰}u' + \underbrace{\left(\frac{\frac{۳}{۴}x^{\frac{-۵}{۲}} - \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}} \times x^{-۱} + \left(\lambda^۲ - \frac{۱}{۴x^۲}\right)x^{-\frac{۱}{۲}}}{x^{-\frac{۱}{۲}}}\right)}_{=\lambda^۲}u = ۰$$

$$\Rightarrow u'' + \lambda^۲u = ۰ \rightarrow D^۲ + \lambda^۲ = ۰ \rightarrow D = \pm\lambda \rightarrow \{\cos\lambda x, \sin\lambda x\}$$

$$\Rightarrow y = uv = C_۱\frac{\cos\lambda x}{\sqrt{x}} + C_۲\frac{\sin\lambda x}{\sqrt{x}}$$

نکته: معمولاً در ۲۰٪ مسائل تغییر متغیر مناسب مانند مثال قبل داده می‌شود مگر در دو حالت که عبارتند از:

حالت اول) (۶۰٪ موارد این گونه است)

از $\{y_{h_1}, y_{h_2}\}$ یکی معلوم باشد:

در این صورت آن را برابر v می‌گیریم و چون در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند، ضریب u در معادله (*) صفر می‌شود:

$$u'' + \left(2\frac{y'_{h_1}}{y_{h_1}} + a\right)u' + 0 = 0$$

مثال: اگر $y = x$ یک جواب $y'' + \frac{1}{x}y' + b(x)y = 0$ باشد جواب دیگر و جواب کلی معادله چیست؟

$$u'' + \left(2\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)u' = 0 \to \frac{u''}{u'} + \frac{3}{x} = 0 \to \ln u' + 3\ln x = 0$$

$$\to u' = \frac{1}{x^3} \to u = \frac{-1}{2x^2} \Rightarrow y_{h_2} = uy_{h_1} = \frac{-1}{2x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1x + c_2\left(\frac{-1}{2x}\right) = C_1x + \frac{C_2}{x}$$

حالت دوم) اگر ضریب u' صفر شود $\left(\frac{2v'}{v} + a = 0\right)$ آنگاه

(به شرطی که معادله روبرو خوب حل شود)

$$u'' + \frac{v'' + av' + bv}{v}u = 0$$

مثال

$$x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{9}{4})y = 0 \quad , \quad \frac{2v'}{v} + a = \frac{2v'}{v} + \frac{1}{x} = 0 \to \frac{2v'}{v} = -\frac{1}{x} \to v = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{v'' + av' + bv}{v}u = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' + \frac{\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{-1}x^{-\frac{3}{2}} + (4 - \frac{9}{4}x^{-2})x^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{2}}}u = 0$$

که اگر ساده بود معادله فوق را حل می‌کنیم که در اکثر موارد لازم نیست و با بررسی گزینه‌های داده شده می‌توان u و v را تشخیص داده و جواب مسأله را مشخص نمود.

مثال: در معادله $xy'' + 2y' + 4xy = 0$ در صورتی که $\lim_{x\to 0} y = 1$ باشد، مقدار $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{\pi}$ ٤) $\frac{2}{\pi}$

چون تغییر متغیر یا یکی از جواب‌های پایه داده نشده، از حالت دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2v'}{v} + \frac{2}{x} = 0 \to v = \frac{1}{x} \to v' = \frac{-1}{x^2}, v'' = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{2x^{-3} + 2x^{-1}(-x^2) + 4x^{-1}}{x^{-1}}u = 0 \to u'' + 4u = 0$$

$$\to u : \{\cos 2x, \sin 2x\} \Rightarrow y : \{\frac{1}{x}\cos 2x, \frac{1}{x}\sin 2x\}$$

$$\lim_{x\to 0} y = 1 \Rightarrow y = C_1\frac{\sin 2x}{x}$$

با توجه به شرایط اولیه داده شده، ضریب عبارت $\frac{\cos 2x}{x}$ در جواب عمومی y صفر است. چون این عبارت به ازای $x=0$، بی‌نهایت خواهد شد:

$$\lim_{x\to 0} y = C_1 \times \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = C_1\times 2 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \to \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} y = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

تخمین جواب حول یک نقطه

بسط مک لورن: بسط هر تابع حول $x_0 = 0$ را بسط مک لورن تابع می‌نامند که عبارتست از:

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$$

که ضرایب C_i مجهولات این بسط هستند که به وسیله روابط زیر قابل دستیابی هستند:

$$f^{(n)}(0) = n!C_n \Rightarrow C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

مثال: بسط مک لورن $f(x)=e^x$ را بیابید.

$$f^{(n)}(x) = e^x \to f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow C_n = \frac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

تعریف: e^x را به دو قسمت زوج و فرد تقسیم می‌کنند که قسمت زوج را کسینوس هیپربولیک و قسمت فرد را سینوس هیپربولیک می‌نامند:

قسمت زوج e^x: $chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$

قسمت فرد e^x: $shx = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$

مثال: تخمین درجه دوم جواب معادله $y'' + (2-x)y' + (x^2+5)y = x^2 - 3x + 3$ با فرض $y(0) = -1$ و $y'(0) = 2$ را بنویسید:

با توجه به صورت مسأله می دانیم که y در $x=0$، ۱- است و شیب ۲+ دارد. اگر تخمین خطی (درجه یک) مورد سؤال بود، پاسخ $y = 2x - 1$ می‌شد که از بسط مک لورن هم به دست می‌آمد. اگر دقیق‌تر بخواهیم از تخمین غیر خطی می‌رویم و ضریب C_2 و ... (در صورت نیاز) را در بسط مک لورن می‌یابیم، برای این کار به y'' در $x=0$ نیاز داریم:

$$y''(0) + (2-0)\times 2 + (0+5)\times -1 = 0^2 - 3\times 0 + 3 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 4 \Rightarrow c_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = -1 + 2x + 2x^2$$

به رابطه اخیر می‌توان این گونه نگاه کرد که تخمین جواب معادله، $y = -1 + 2x$ با حداکثر خطای $2x^2$ می‌باشد.

اگر تخمین درجه ۳ را می‌خواست: (باید $y'''(0)$ را می‌یافتیم).

از معادله دیفرانسیل یکبار مشتق می‌گیریم تا y''' ایجاد شود.

$$y''' + (2-x)y'' - y' + (x^2+5)y' + 2xy = 2x - 3$$

حال مقدار دهی در $x=0$:

$$y''' + 2\times 4 + 4\times 2 + 0 = -3 \quad \to \quad y'''(0) = -19 \Rightarrow c_3 = \frac{-19}{6} \Rightarrow y = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{19}{6}x^3$$

مثلاً اگر سوال می‌کرد حداکثر خطای پاسخ از حالت خطی به ازای حداکثر تغییر $\Delta x = \frac{1}{10}$ چه می‌شود، خواهیم داشت:

$$\Delta y_{max} = 2x^2 + \frac{19}{6}x^3 = 2\times\frac{1}{100} + \frac{19}{6}\times\frac{1}{1000} = \frac{139}{6000}$$

توجه: در محاسبه حداکثر خطا، علامت منفی در ضریب x^3، مثبت در نظر گرفته می‌شود تا حداکثر خطا بـه دسـت آیـد، چـون در واقع Δx می‌تواند مثبت یا منفی باشد و ما باید حالتی را در نظر بگیریم که حداکثر خطا محاسبه شود.