حل سری

یعنی جواب دقیق می‌خواهیم نه به صورت صریح بلکه به صورت سری. اگر فرض کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$ جواب معادله دیفرانسیل خطی باشد, در این صورت شعاع همگرایی سری فوق, مینیمم اندازه $z_i - x_0$ است $R=\min|z_i-x_0|$ که z_i نقاط تکین ضرایب است.

مثال- $\left(x^2+x+1\right)y''+\frac{2x}{x^2+2}y'+\frac{3x-1}{x^2-1}y=e^{-x}$

اگر $y=\sum_{0}^{\infty} C_n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ جواب باشد, شعاع همگرایی چقدر است؟

$$y''+\frac{2x}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+x+1\right)}y'+\frac{3x-1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+x+1\right)}y=\frac{e^{-x}}{x^2+x+1}$$

$x^2+2=0 \qquad x=\pm i\sqrt{2}$

$x^2+x+1=0 \qquad x=\frac{-1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2-1=0 \qquad x=\pm 1$

$\min|z_i-x_0|=\frac{1}{2}=R$

یعنی اگر xها از $x_0=\frac{1}{2}$ زیاد شود به ۱+ که برسد مخرج ضریب y صفر می‌شود و معادله دیفرانسیل ∞ می‌شود و از بین می‌رود $\leftarrow R=\frac{1}{2}$ شعاع همگرایی است.

تمرین شعاع همگرایی $\sum_{0}^{\infty} C_n (x+1)^n$ برای معادله دیفرانسیل $\left(x^2+x+1\right)y''-2xy'+\left(4x^2-1\right)y=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل سری: حول $x=0$ (اگر نبود به وسیله تغییر متغیر, معادله دیفرانسیل را عوض می‌کنیم و انتقال می‌دهیم)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad ; \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} \quad ; \quad y'''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

ضریب x^n را در معادله متحد قرار می‌دهیم.

$y\to C_n \qquad y'\to(n+1)C_{n+1} \qquad y'''\to(n+2)(n+1)C_{n+2}$

$xy\to C_{n-1} \qquad xy'\to nC_n \qquad xy''\to(n+1)nC_{n+1}$

$x^2y\to C_{n-2} \qquad x^2y'\to(n-1)C_{n-1} \qquad x^2y''\to n(n-1)C_n$

و با داشتن $C_0=y(0)$ و $C_1=y'(0)$ و $C_2=\frac{y''(0)}{2!}$ و ... و $C_k=\frac{y^{(k)}(0)}{k!}$ می‌توان C_n را تعیین کرد.

چون حول ۰ همگرایی بود، $y'(0), y(0), \ldots$ را داریم که با ضرایب C_n مرتبط است.

مثال- رابطه بین ضرایب معادله $y''+(\chi+1)y=e^x$ چیست؟ $\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)$ $(n+2)(n+1)C_{n+2}+C_{n-1}+C_n=\frac{1}{n!}$

مثال- یک جواب $x^2y''-xy'+(1-x)y=0$ چگونه است؟

$$\sum\frac{x^{n+1}}{(2n)!} \quad \sum\frac{x^{n+1}}{(n!)^2} \quad \sum\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$n(n-1)C_n-nC_n+C_n-C_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(n^2-2n+1\right)C_n-C_{n-1}=0 \quad \Rightarrow \quad C_n=\frac{C_{n-1}}{(n-1)^2}\to C_2=\frac{C_1}{1^z}\ ,\ C_3=\frac{C_2}{2^2},\ C_4=\frac{C_3}{3^2}$$

$$\to \cancel{C_2}\,\cancel{C_3}\,\cancel{C_4}\cdots C_n=\frac{C_1\cancel{C_2}\,\cancel{C_3}\cdots C_{n-1}}{((n-1)!)^2} \quad \to \quad C_{n+1}=\frac{C_1}{(n!)^2} \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n!)^2}$$

معادله لژاندر

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

اگر $y=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nx^n$ جوابی از معادله باشد و شعاع همگرایی سری ۱ و فاصله همگرایی $|x|<1$ باشد. همچنین رابطه بین C_nها بـه صـورت زیر در می‌آید:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2}-n(n-1)C_n-2nC_n+\alpha(\alpha+1)C_n=0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)C_{n+2}=(nC_n+1)-\alpha(\alpha+1)C_n$$

$$\Rightarrow C_{n+2}=\frac{(n-\alpha)(n+\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}C_n$$

مهم: رابطه بین ضرایب معادله لژاندر

با داشتن $C_0=y(0)$ و $C_1=y'(0)$ می‌توان C_nها را حساب کرد.

مثال: جواب معادله $y'(0)=0, y(0)=1, \left(1-x^2\right)y''-2xy'+20y=0$ چیست؟

$$C_{n+2}=\frac{(n-4)(n+5)}{(n+2)(n+1)}C_n \qquad C_1=0\to C_3=C_5=\ldots=0$$

$$\begin{cases} C_0=1\to C_2=\frac{-20}{2}=-10 \\ C_4=\frac{-2\times 7}{4\times 3}\times -10=\frac{+70}{6}=\frac{35}{3} \quad \Rightarrow \quad y=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4=P_4(x) \\ C_6=0\to C_8=C_{10}=\ldots=0 \end{cases}$$

$P_4(x)$: چند جمله‌ای لژاندر

معادله کوشی اویلر

$$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1xy'+a_0y=b(x)$$

(a_iها اعداد ثابتی هستند)

این معادله یکی از معادلات معروف در آزمون‌های کارشناسی ارشد است که با تعویض متغیر $x=e^z$ (یا $z=\ln x$) معادله بـه فـرم معادلـه بـا

ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. با این تعویض متغیر معادله همگن به فرم زیر می‌شود.

$$\left(\left\{D(D-1)(D-2)...(D-(n-1))\right\}+\left\{a_{n-1}D(D-1)...(D-n+2)\right\}+...+a_1D+a_0\right)y=0$$

حالت خاص: (مرتبه ۲)

$$x^2y''+a_1xy'+a_0y=b(x) \quad ; \quad x=e^z \ , \ y'_x=\frac{y'_z}{e^z}=e^{-z}y'_z \ , \ y''_x=\frac{-e^{-z}y'_z+e^{-z}y''_z}{e^z}=e^{-2z}y''_z-e^{-2z}y''_z$$

$$\Rightarrow e^{2z}\left(e^{-2z}(y''-y')\right)+a_1e^z\left(e^{-z}y'\right)+a_0y=b\left(e^z\right)$$

$$\Rightarrow \quad y''-y'+a_1y'+a_0y=b\left(e^z\right) \quad \Rightarrow \quad \left(D(D-1)+a_1D+a_0\right)y=b\left(e^z\right)$$

اگر $(D-\alpha)^P=0$ آنگاه مجموعه جواب‌های پایه عبارتند از $\left\{e^{\alpha z},ze^{\alpha z},z^2e^{\alpha z},...,z^{p-1}e^{\alpha z}\right\}=\left\{x^\alpha,x^\alpha\ln x,...,x^\alpha(\ln x)^{p-1}\right\}$

و اگر $\left((D-\alpha)^2+\beta^2\right)^P=0$، مجموعه جواب‌های پایه عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} e^{\alpha z}\cos\beta z,...,e^{\alpha z}z^{p-1}\cos\beta z \\ e^{\alpha z}\sin\beta z,...,e^{\alpha z}z^{p-1}\sin\beta z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x^\alpha\cos(\beta\ln x),...,x^\alpha(\ln x)^{p-1}\cos(\beta\ln x) \\ x^\alpha\sin(\beta\ln x),...,x^\alpha(\ln x)^{p-1}\sin(\beta\ln x) \end{Bmatrix}$$

در حالت کلی اگر $\alpha\in N$،

$$\begin{cases} P_{2n}(x) & \alpha=2n \quad C_0\neq 0, C_1=0 \quad \text{تابع زوج:} \\ P_{n-1}(x) & \alpha=2n-1 \quad C_0=0, C_1\neq 0 \quad \text{تابع فرد:} \end{cases}$$

می‌توان از رابطه مقابل $P_n(x)$ را حساب کرد.

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0 & n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m \end{cases}$$

همچنین $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0 & n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m \end{cases}$ یعنی چند جمله‌های لژاندر بر هم عمودند و نرم تابع لژاندار $\frac{2}{2n+1}$ است.

بسط سری جواب در نقاط تکین

نقطه x_0 را تکین (منفرد) معادله دیفرانسیل خطی $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-2)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)$ گویند هرگاه a_{n-1} در x_0، حداکثر ۱ قطب a_{n-2} در x_0، حداکثر ۲ قطب, ...و a_{n-i} در x_0، حداکثر i قطب و... و a_0 در x_0، حداکثر n قطب داشته باشند. در غیر این صورت تکین ما منظم نیست.

مثال- به ازای چه مقادیر α و β، $x=0$ تکین منظم است؟ $x^3y''+(\alpha x+\sin x)y'+(\beta+\ln(1+x))y=0$

$$a_1=\frac{\alpha x+\sin x}{x^3}=\frac{\alpha x+x-\frac{x^3}{3!}+...}{x^3}\rightarrow\alpha=-1\rightarrow x \text{ حذف جمله}$$

x^3، صورت ساده می شود $\leftarrow x=0$ قطب نیست.

$$a_0=\frac{(\beta+\lim(1+x))}{x^3}=\frac{\beta+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x^3}$$

قطب مرتبه ۲ $\Rightarrow \beta=0$

اگر $x_\circ$ نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل $y^{(n)}a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_\circ(x)y=b(x)$ باشد, در این صورت جوابی به صورت فوبینیوس $y=(x-x_\circ)^r\sum_{n=\circ}^{\infty}C_n(x-x_\circ)^n$ خواهد داشت.

توجه: وقتی $x=x_\circ$ تکین منظم است، شعاع همگرایی سری قبلی $\circ$ می‌شود، بنابراین آن سری به عنوان جواب معادله دیفرانسیل مناسب نیست.

برای تعیین r از عبارت مشتق‌های متوالی تا n گرفته و ضریب $C_\circ$ را مخالف صفر قرار می‌دهیم. چرا $C_\circ\neq\circ$؟

$$y=x^r\sum_{n=\circ}^{\infty}C_nx^n=x^r\left(C_\circ+C_1x+\ldots+C_nx^n+\ldots\right)$$

فرض $C_\circ=\circ\rightarrow y=x^r\left(C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots\right)=x^{r+1}\left(C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1}+\ldots\right)$

$$=x^{r'}\left(C'_\circ+C'_1x+\ldots+C'_nx^n+\ldots\right)\quad\Rightarrow\quad C_\circ\neq\circ$$

ادعا کرده‌ایم صفر با قطب مرتبه r دارد که از مجموعه سری x^r فاکتور گرفته شده است و $C_\circ\neq\circ$ می‌شود. معادله مشخصه عبارت می شود از:

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)+a'_{n-1}(x_\circ)r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)+\ldots+a'_1(x_\circ)r+a'_\circ(x_\circ)=\circ$$

توجه داشته باشید که 'aها نماد مشتق نیستند و

$a'_{n-i}(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}(x-x_\circ)^i a_{n-i}(x_\circ)\quad\Rightarrow\quad a'_{n-1}(x_\circ)$ یک مقدار محدود می‌شود

مثال- معادله شاخصی معادله دیفرانسیل روبه رو حول $x=\circ$ چگونه است؟ $x^2y''+(2x+1)\sin 3xy'+\left(4x^2-1\right)y=\circ$

چگونه است؟ حول $x=\circ$

$$\left.\begin{array}{ll} a_1=\dfrac{(2x+1)\mathrm{Sin}3x}{x^2} & a'_1(\circ)=\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{x^1(2x+1)\sin 3x}{x^2}=3 \\ a_\circ=\dfrac{4x^2-1}{x^2} & a'_\circ(\circ)=\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{\cancel{x^2}\left(4x^2-1\right)}{\cancel{x^2}}=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad r(r-1)+3r+(-1)=\circ\quad\rightarrow\quad r^2+2r-1=\circ$$

بسته به اینکه معادله مشخصه دارای چه نوع جوابی باشد، جواب معادله دیفرانسیل متفاوت است.

۱) $(r-\alpha)^p=\circ$ ریشه α از مرتبه P : $(x-x_\circ)^\alpha\sum_{n=\circ}^{\infty}C_{n_1}(x-x_\circ)^n$ و $(x-x_\circ)^\alpha\ln(x-x_\circ)\sum C_{n_2}(x-x_\circ)^n$ و ...

اگر در یک خط جا نشدند این عبارت های Σ دار را در خط بعد بنویسید $(x-x_\circ)^\alpha\left(\ln(x-x_\circ)\right)^{p-1}\sum C_{np}(x-x_\circ)^n$

۲) $\left((r-\alpha)^2+\beta^2\right)^p$

$$\begin{cases}(x-x_\circ)^\alpha\cos\beta\ln(x-x_\circ)\sum C_{n_1}(x-x_\circ)^n\\(x-x_\circ)^\alpha\sin\beta\ln(x-x_\circ)\sum C_{n_1}(x-x_\circ)^n\end{cases}$$

,

⋮

$$\begin{cases}(x-x_\circ)^\alpha\left(\ln(x-x_\circ)\right)^{p-1}\cos\beta\ln(x-x_\circ)\sum C_{n_p}\cdots\\(x-x_\circ)^\alpha\left(\ln(x-x_\circ)\right)^{p-1}\sin\beta\ln(x-x_\circ)\sum C_{n_p}\cdots\end{cases}$$

همچنین اگر تفاضل جواب های معادله مشخصه عدد صحیح باشد جواب ها غیر مستقل شده و یکی را در $\ln(x-x_\circ)$ ضرب می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n_{r_1}}(x-x_0)^n \\ y_2=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{nr_2}(x-x_0)^n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r_2=k+r_1 \overset{k\in z}{\Rightarrow} y_2=(x-x_0)^k y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum C_n(x-x_0)^{n+k} \\ \Rightarrow y_2=(x-x_0)^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^m=y_1 \end{array}$$

پس در این صورت

$$y_1=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n_{r_1}}(x-x_0)^n \quad , \quad y_2=(x-x_0)^{r_1}\ln(x-x_0)\sum_{n=0}^{\infty}C_{n_3}(x-x_0)^n+(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n_2}(x-x_0)^n$$

مثال: معادله $x^2(x^2-1)y''-x(x^2+1)y'+(x^2+1)y=0$ را حل کنید.

$$r(r-1)+1\times r-1=0\to r^2-1=0\to r=\pm 1$$

$$a_1'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x)(x^2+1)}{x^2(x^2-1)}=1 \qquad a_0'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+1)}{x^2(x^2-1)}=-1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1==x\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \\ y_2=x\lim x\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n+x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \end{cases}$$

مثال- جواب دیگر معادله $xy''+y'+xy=0$ با شرط $y_1(0)=0$ در صورتی که $y_1(x)$ جوابی از معادله باشد, چیست؟

۱) $y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{2n}$ ۲) $y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{2n-1}$ ۳) $y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n$ ۴) $y_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$

$$\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{x}\to a_1'(0)=1 \\ a_0=1\to a_0'(0)=0 \end{array}\to r(r-1)+r=0$$

گزینه ٤ $\to r=0$ مرتبه دوم.

اگر جواب های معادله $x^2(2+x)y''+\alpha xy'+\beta(2-x)y=0$, $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n-1}$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n$ باشد, β,α چه مقدارهایی دارند؟

$$\left.\begin{array}{l} a_1'(0)=\frac{\alpha x^2}{x^2(2+x)}=\frac{1}{2}\alpha \\ a_0'(0)=\frac{\beta x^2(2-x)}{x^2(2+x)}=\beta \end{array}\right\} \to r(r-1)+\frac{1}{2}\alpha r+\beta=0 \quad \Rightarrow \quad r^2+\left(\frac{1}{2}\alpha-1\right)r+\beta=0$$

از جواب ها : $r_1=-1$, $r_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\beta=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha-1=\frac{3}{2}\to\alpha=5$

مثال) جواب معادله روبرو $y^{(4)}+\frac{a}{x^2}y^{(2)}=0$ است. $c_1+c_2x+c_3x^4+c_4g(x)$ $g(x)$ چیست؟

کوشی اویلر $r(r-1)(r-2)(r-3)+0+ar(r-1)+0=0$

$$r(r-1)(r^2-5r+6+a)=0\Rightarrow r(r-1)^2(r-4)=0 \quad \Rightarrow \quad c_1+c_2x+c_3x^4+x\ln xc_4 \quad \Rightarrow \quad g(x)=x\ln x$$

اگر $y=c_1+c_2x^2+c_3x^3+c_4g(x)$ آنگاه $g(x)=x$ و اگر $y=c_1+c_2x+c_3x^5+c_4g(x)$ آنگاه $g(x)=\ln x$ و ...

معادله بسل

معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+\left(\lambda^2x^2-\nu^2\right)y=0$, جواب هایی به صورت $\left\{J_{-\nu}(\lambda x)_{\nu\notin z},J_\nu(\lambda x)\right\}$ یا $\left\{J_n(\lambda x)_{n\in z},y_n(\lambda x)\right\}$

دارد. $J_\nu(\lambda x)$ را تابع بسل مرتبه ν گویند.

اگر سری فوبینیوس جواب معادله به صورت $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ باشد، در این صورت داریم: $r(r-1)+1r-\nu^2=0 \quad \Rightarrow \quad r=\pm\nu$

و تعریف می کنیم: $J_\nu(x)=x^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n \,,\, J_{-\nu}(x)=x^{-\nu}\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$

یا اگر $\nu = n \in \mathbb{Z}$, گوییم: $J_n(x)=x^n\sum_{n=0}^{\infty} C_m x^m \quad , \quad y_n(x)=x^n \ln x \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m + x^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$

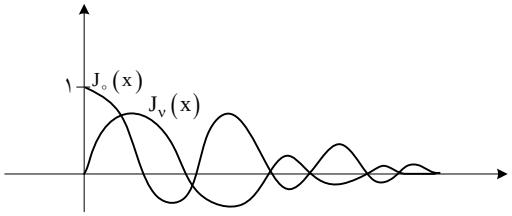
$J_n(x)$ را تابع بسل نوع اول و $y_n(x)$ را تابع بسل نوع دوم می گویند دقت شود تابع بسل نوع دوم در $x=0$ تکین است. $J_{-\nu}(x)$ در $x=0$ تکین از درجه ν دارد. و $y_n(x)$ در $x=0$ قطب مرتبه n دارد.

فرق تکین و قطب: درجه قطب حتماً باید صحیح باشد مثلا $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در $x=0$ تکین است نه قطب توجه $y_n(x)$ به علت وجود $\ln x$ در $x=0$ تکین است.

نمودار $y=J_\nu(x)$ به صورت مقابل است:

فقط $J_0(0)$ از یک شروع می شود و بقیه $J_\nu(x)$ها در $x=0$ از صفر شروع می شوند.

به عبارتی $J_\nu(x)=0$ بی نهایت جواب دارد.



رابطه بازگشتی بین Jها

$$1)\ \begin{cases} J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \\ J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x) \end{cases}$$

$$2)\ \int_0^\infty x^{-1}J_n(x)J_m(x)dx=0 \quad ; \quad n\neq m$$

یعنی توابع بسل با وزن x^{-1}، متعامد هستند.

$$3)\ J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta$$

مساله خاص

$$x^2y''+xy'+\left(\lambda^2\times x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

جواب های این معادله عبارتند از: $J_{\frac{1}{2}}(\lambda x)$ و $J_{\frac{-1}{2}}(\lambda x)$

به روش $\frac{2V'}{V}+a=0$ معادله را حل می کنیم:

$$\frac{2V'}{V}+\frac{1}{x}=0$$

$$2\ln V=-\ln x \ \rightarrow \ V=x^{\frac{-1}{2}} \qquad V'=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}} \qquad V''=\frac{3}{4}x^{\frac{-5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad u''+\frac{\frac{3}{4}x^{\frac{-5}{2}}+x^{-1}\times\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\left(\lambda^2-\frac{1}{4}x^{-2}\right)x^{\frac{-1}{2}}}{x^{\frac{-1}{2}}}u=0$$

$$u''+\lambda^{۲}u=۰ \quad u=\{\sin\lambda x\ ,\cos\lambda x\} \quad\rightarrow\quad y=\left\{x^{\frac{-۱}{۲}}\sin\lambda x, x^{\frac{-۱}{۲}}\cos\lambda x\right\}$$

$$\Rightarrow\quad J_{\frac{۱}{۲}}(\lambda x)=\frac{\sin\lambda x}{\sqrt{x}} \quad , \quad J_{\frac{-۱}{۲}}(\lambda x)=\frac{\cos\lambda x}{\sqrt{x}}$$

فرق $J_{\frac{۱}{۲}}$ و $J_{\frac{-۱}{۲}}$ این است که $x=۰$ تکین $J_{\frac{-۱}{۲}}$ است.

مثال- مطلوبست $J_{\frac{۳}{۲}}(x\lambda)$ و $J_{-\frac{۳}{۲}}(x\lambda)$ معادله قبل.

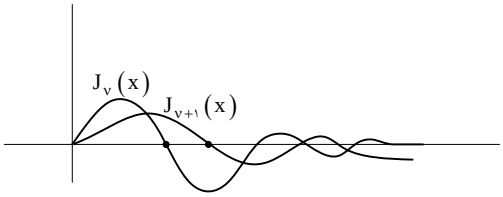
$$J_{\nu-۱}-J_{\nu+۱}=\frac{۲\nu}{x}J_{\nu}(x)$$

$$\Rightarrow\quad J_{-\frac{۱}{۲}}(x)-J_{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\left(\frac{۱}{۲}\right)}{x}J_{\frac{۱}{۲}}(x) \quad\Rightarrow\quad J_{\frac{۳}{۲}}(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{۳}{۲}}(x\cos x-\sin x)$$

$$J_{-\frac{۳}{۲}}(x)-J_{\frac{۱}{۲}}(x)=\frac{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{x}J_{-\frac{۱}{۲}}(x)$$

$$\Rightarrow\quad J_{-\frac{۳}{۲}}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=\frac{x\sin x-\cos x}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{۳}{۲}}(x\sin x-\cos x)$$

نکته J_{ν}ها برای $x>۰$ صفر مشترک ندارند.



نکته J_{ν} ریشه مضاعف ندارد

چون اگر باشد، J'_{ν} هم آن

ریشه را دارد $\leftarrow$ $J_{\nu-۱},J_{\nu}$

ریشه مشترک می یابند که غلط است.

$$\begin{cases} J_{\nu-۱}(x)-J_{\nu+۱}(x)=\frac{۲\nu}{x}J_{\nu}(x) \\ J_{\nu-۱}(x)+J_{\nu+۱}(x)=۲J'_{\nu}(x) \end{cases}$$

مثال- جواب معادله $y'+\frac{۱}{x}y=J_{۰}(x)+۱$ چیست؟

از جمع آثار استفاده می کنیم یکبار ورودی $J_{۰}(x)$ و یک بار ورودی ۱ را می گیریم. طبق رابطه بازگشتی بین توابع بسل داریم:

$$\begin{cases} J_{\nu-۱}(x)-J_{\nu+۱}(x)=\frac{۲\nu}{x}J_{\nu}(x) \\ J_{\nu-۱}(x)+J_{\nu+۱}(x)=۲J'_{\nu}(x) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad J'_{\nu}(x)+\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)=J_{\nu-۱}(x) \quad\Rightarrow\quad \nu=۱\rightarrow J'_{۱}(x)+\frac{۱}{x}J_{۱}(x)=J_{۰}(x)\rightarrow$$

جواب ورودی $J_{۱}(x),J_{۰}$ شد.

حال اگر ۱ بدهیم خروجی چه می شود؟ معادله همگن به فرم روبه رو می شود که حل می کنیم:

$$y'+\frac{۱}{x}y=۰ \quad , \quad \frac{y'}{y}+\frac{۱}{x}=۰ \quad \ln y=-\ln x \quad y_h=\frac{۱}{x}$$

$$u'\frac{۱}{x}=۱\rightarrow u'=x\rightarrow u=\frac{x^{۲}}{۲}\rightarrow y_p=\frac{x}{۲}\Rightarrow y_{tot}=cy_h+J_{۱}(x)+\frac{x}{۲}=\frac{c}{x}+J_{۱}(x)+\frac{x}{۲}=\frac{x^{۲}+c}{۲x}+J_{۱}(x)$$