



معادلات دیفرانسیل



معادلات مرتبه اول خاص

$$y' = f(x)g(y) \rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)d(x) \rightarrow G(y) = F(x) + C$$

۱- جداییپذیر:



مثال:

$$y' = xe^{x^2-y} \rightarrow y'e^y = xe^{x^2} \rightarrow \int e^y dy = \int xe^{x^2} dx \rightarrow e^y = \frac{1}{y} e^{x^2} + c \rightarrow y = \ln\left(c + \frac{1}{y} e^{x^2}\right)$$

$$y' = f(x, y) = f(kx, ky)$$

۲- معادلات درجه صفر:

این گونه معادلات با تغییر متغیر $\frac{y}{x} = u$ به معادله جداییپذیر که در مورد قبلی ذکر شد، تبدیل می‌شوند:

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u = f(x, ux) = f(1, u) \rightarrow u'x = f(1, u) - u \quad (\text{معادله جداییپذیر})$$

$$\rightarrow \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln x + c \rightarrow H(u) = H\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{x+y}{x}$$



مثال:

$$\text{درجه صفر} \rightarrow u'x + u = e^u + 1 + u \rightarrow u'x = e^u + 1$$

$$\rightarrow \frac{du}{e^u + 1} = \frac{dx}{x} \rightarrow -\ln(1 + e^{-u}) = \ln x + c$$

$$\rightarrow -\ln\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right) = \ln x + c \rightarrow x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right) = C$$

$$y' = \left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)^n \quad (\text{۳- معادلات دوخطی (صورت و مخرج، یک خط هستند)})$$

دو حالت دارد: (۱) دو خط موازی هستند؛ تغییر متغیر $u = ax + by$ معادله را حل می‌کند.

(۲) دو خط متقاطع هستند؛ تغییر متغیر $u = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ که $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ نقطه تلاقی دو خط است.

$$y' = \frac{x + y - 2}{x - y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{y - 1}{x - 1}$$



مثال:

$$\rightarrow y - 1 = u(x - 1) \rightarrow y' = u'(x - 1) + u \rightarrow u'(x - 1) + u = \frac{x + 1 + u(x - 1) - 2}{x - 1 - u(x - 1)} = \frac{(x - 1)(1 + u)}{(x - 1)(1 - u)}$$

$$\rightarrow u'(x - 1) = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \frac{1 + u^2}{1 - u} \quad (\text{معادله جداییپذیر})$$

$$\rightarrow \int \left(\frac{1}{1 + u^2} - \frac{u}{1 + u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x - 1} \rightarrow \text{tg}^{-1} \frac{y - 1}{x - 1} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y - 1}{x - 1} \right)^2 \right) = \ln |x - 1| + C$$

(۴) دیفرانسیل کامل



معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ دیفرانسیل کامل است اگر $u(x, y) = c$ جواب معادله باشد. آنگاه داریم:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = dc = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N \end{cases} \Rightarrow \text{شرط دیفرانسیل کامل: } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$



مثال:

$$ydx - xdy = 0 \quad \frac{\partial(y)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial x} = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \rightarrow \text{معادله کامل نیست}$$

در این موارد، معادله را در عبارتی به نام فاکتور انگرالساز (μ) ضرب می‌کنیم تا معادله کامل شود:

$$\mu ydx - \mu xdy = 0 \rightarrow \frac{\partial(\mu y)}{\partial y} - \frac{\partial(-\mu x)}{\partial x} = 0 \rightarrow \mu + y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu + x \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

فرض می‌کنیم تابع μ تنها تابعی از x باشد:

$$\mu = \mu(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu' \end{cases} \Rightarrow 2\mu + x\mu' = 0 \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{x} \rightarrow \ln \mu = -2 \ln x \rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\rightarrow \text{معادله کامل: } \frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \rightarrow u = \frac{-y}{x} + g(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{x} \rightarrow u = \frac{-y}{x} + h(x) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{-y}{x} = C$$

یک خط گذرنده از مبدأ $y = cx$

$$f(x) = g(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} h(t)f(x, t)dt$$

۵- معادلات انتگرالی خاص

هدف: تعیین $f(x)$ ، روش حل: مشتق

$$\left(\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right)' = b'f(x, b) - a'f(x, a) + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dt$$

نکته:



$$f(x) = e + \int_1^x e^{2t} f(t) dt \rightarrow f(1) = ? \quad , \quad f'(x) = 0 + 1(e^{2x} f(x)) \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^{2x} \rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

مثال:



برای یافتن C نیاز به شرایط مرزی داریم. یک شرط مرزی در $x=1$ از خود معادله قابل دستیابی است:

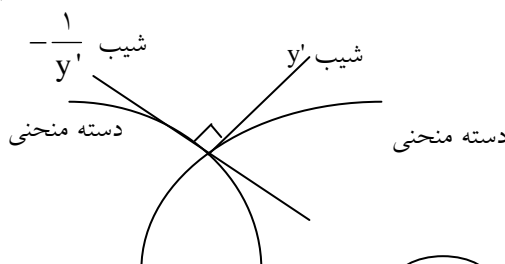
$$f(1) = e + \int_1^1 e^{2t} f(t) dt = e + 0 = e \rightarrow \text{تابع از } \left(\frac{1}{e} \right) \text{ می‌گذرد}$$

$$\rightarrow \ln e = \frac{1}{2} e^2 + c \rightarrow c = 1 - \frac{1}{2} e^2 \rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}(e^{2x} - e^2) + 1} \rightarrow f(2) = e^{\frac{1}{2}(e^4 - e^2) + 1}$$

دسته منحنی‌های متعامد

فرض کنید جواب معادله $f(x, y, y') = 0$ دسته منحنی $g(x, y, c) = 0$ باشد. در این صورت جواب معادله $f(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$ دسته منحنی

$h(x, y, c) = 0$ می‌شود که g و h متعامدند.





مثال: مسیرهای قائم خانواده منحنی روبرو چیست؟ $xe^{cy} = 1$

توجه: برای حل این گونه سؤالات ابتدا C را تنها کنید سپس مشتق بگیرید. در اینجا ابتدا از دو طرف Ln می‌گیریم و سپس حل می‌کنیم.

$$\ln x + cy = 0 \rightarrow \frac{\ln x}{y} + c = 0 \rightarrow \frac{\ln x}{y} = -c \rightarrow \frac{\frac{1}{x}y - y' \ln x}{y^2} = 0 \rightarrow \text{معادله قائم: } \frac{\frac{1}{x}y - \frac{1}{-y'} \ln x}{y^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{y'} = 0 \rightarrow yy' + x \ln x = 0 \rightarrow \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} = c$$



توجه در این معادله $x > 0$ است و نیازی به استفاده از قدر مطلق در $\ln |x|$ نیست.

استفاده از $\ln |x|$ ، دسته منحنی اضافه را وارد جواب‌ها می‌کند که در اینجا لازم نیست.

معادله مرتبه ۱ خطی:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

فرم کلی: (ضریب بالاترین مرتبه حتماً ۱ باشد)

$$y = uv$$

تغییر متغیر لازم برای حل:

$$\rightarrow u'v + uv' + auv = b \quad (v' + av)u + vu' = b$$

* u و v توابع دلخواه هستند؛ v را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که ضریب u صفر شود: $v' + av = 0$

* اگر $b=0$ باشد، معادله همگن نامیده می‌شود.

روش حل: ۱- معادله همگن را حل می‌کنیم (y_h)

۲- u' برابر معادله همگن را حل می‌کنیم. (یعنی فرض کرده‌ایم که $v=y_h$ است) و u را می‌یابیم.

۳- $y_p = uy_h$ ، جواب خصوصی را می‌یابیم.

۴- جواب عمومی $y = cy_h + y_p$

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x, \quad y(1) = e - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^3} = ?$$

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$

$$\ln y = 2 \ln x \rightarrow y_h = x^2 \rightarrow u'x^2 = x^2 e^x \rightarrow u' = e^x \rightarrow u = e^x \rightarrow y_p = uy_h = e^x x^2$$

$$\rightarrow y = cx^2 + e^x x^2 = x^2(c + e^x) \rightarrow y(1) = -1 + e = c + e \rightarrow c = -1 \rightarrow y = x^2(e^x - 1)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$



مثال:

مالت‌های منجر به معادله مرتبه ۱ خطی

$$y' + ay = by^\alpha \quad y^{-\alpha}y' + ay^{1-\alpha} = b \rightarrow v = y^{1-\alpha} \rightarrow v' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{v'}{1-\alpha} + av = b \rightarrow v' + a(1-\alpha)v = b(1-\alpha) \quad \text{خطی مرتبه اول:}$$

(۲) معادله خطی بر حسب x

$$y' = \frac{1}{y+x}, \quad y(0) = 1$$



مثال:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+x} \rightarrow \frac{dx}{dy} = x+y \rightarrow x' - x = y$$

$$\text{همگن } x' - x = 0 \rightarrow x_h = e^y$$

$$u'e^y = y \rightarrow u' = ye^{-y} \rightarrow u = -(y+1)e^{-y} \rightarrow x_p = -(y+1)$$

$$\rightarrow x = Ce^y - y - 1 ; \quad 0 = Ce^{-1-1} \rightarrow C = \frac{2}{e} \rightarrow x = \frac{2}{e}e^y - y - 1$$

(۳) معادله مرتبه دوم به فرم $\frac{d^2y}{dx^2} + f(y) = 0$ (معادله موج ساده)

با تغییر متغیر $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$, $\frac{dy}{dx} = p$ قابل حل است.

(۴) تغییر متغیر $x = g(z)$ یا $z = g^{-1}(x)$

در بعضی معادلات با این تغییر متغیر، به حالت‌های قابل حل توضیح داده شده می‌رسیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \bigg/ \frac{dx}{dz} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_z}{g'_z}$$

توجه داشته باشید که: